УДК 552.578.2.061.4:(537.8+550.837.014)

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОРИСТЫХ ФЛЮИДОНАСЫЩЕННЫХ СРЕДАХ

В. В. Филатов

Сибирский НИИ геологии, геофизики и минерального сырья, Новосибирск, Россия

Рассмотрены вопросы, связанные с интерпретацией параметров, фигурирующих в феноменологическом подходе, который основан на приближении Коула – Коула. Использование фрактальной модели среды и уравнений в дробных производных позволяет взглянуть на вопросы обоснования таких параметров с более общих позиций. В частности, показан физический смысл степенного параметра, входящего в формулу Коула – Коула, который устанавливает зависимость между временем релаксации и характерными размерами элементов микроструктуры среды. Использование решений уравнений в дробных производных позволяет в рамках приближения Коула – Коула уточнить распределение времен релаксации для случая, когда в среде происходит сложный процесс, который обусловлен комбинацией временных спадов, соответствующих набору различных параметров Коула – Коула. Для этого в качестве релаксационной модели используется закон Кольрауша – Уильямса – Уотса. Показано сходство релаксационной модели теории вызванной поляризации и модели изменения удельного сопротивления при упругом воздействии (сейсмоэлектрический эффект первого рода). Это открывает возможность на основе анализа полной кривой релаксации по аналогии с сейсмоэлектроразведкой, прогнозировать дополнительные параметры гетерогенной среды, например пористость и проницаемость.

Ключевые слова: *электроразведка, электромагнитное поле, феноменологический подход, пористая среда, флюидонасыщенность.*

SOME PROBLEMS OF THE PHENOMENOLOGICAL APPROACH IN THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC FIELD IN A POROUS MEDIUM SATURATED WITH FLUIDS

V. V. Filatov

Siberian Research Institute of Geology, Geophysics and Mineral Resources, Novosibirsk, Russia

The paper discusses interpretation of parameters applied by the phenomenological approach based on the Cole–Cole approximation. It was shown that the use of the fractal medium model and equations in fractional derivatives enables more general substantiation of such parameters. In particular, the physical meaning of the power parameter in the Cole–Cole formula was discussed, which correlates the relaxation time and the typical dimensions of elements of the medium microstructure. The use of solution equations in fractional derivatives enables adjustment of relaxation times distribution under the Cole–Cole approximation in cases when there is a complex process in the medium, driven by a combination of time decays corresponding to a set of various Cole–Cole parameters, by using the Kohlrausch-Williams-Watts law as a relaxation model. The author demonstrates a similarity between the relaxation model of the induced polarisation theory and the resistivity variation model at an elastic impact (seismoelectric effect of the first kind). This allows predicting additional parameters of the inhomogeneous medium, e.g. porosity and permeability, based on the analysis of a total relaxation curve.

Keywords*: electrical survey, electromagnetic field, phenomenological approach, porous medium, fluid saturation.*

DOI 10.20403/2078-0575-2017-6c-139-146

Феноменологический подход всегда играл существенную роль в самых разных областях науки. Специфика его, по определению В. Гейзенберга, заключается в «формулировке закономерностей в области наблюдаемых физических явлений, в которой не делается попытки свести описываемые связи к лежащим в их основе общим законам природы, через которые они могли бы быть поняты» [1].

Как отмечает В. Гейзенберг, такой подход появляется там, где наблюдаемые явления либо чрезвычайно сложны, либо не могут быть описаны из-за математических трудностей или из-за незнания упомянутых законов природы. Вместе с тем одна из важнейших характеристик феноменологических теорий состоит в том, что они делают возможным адекватное описание наблюдаемых явлений, и в частности часто позволяют очень точно смоделировать новые эксперименты. В прикладных областях полученные закономерности часто оказывались настолько важнее изучения реальных связей, что временами делали познание истинных законов природы даже в какой-то степени излишним.

Теория электромагнитных полей (особенно в прикладных аспектах) не исключение. Начиная с системы уравнений Максвелла и до настоящего времени феноменологический подход – один из основных инструментов изучения различных особенностей поведения электромагнитных полей.

Известно, что многие процессы, происходящие в пористых флюидонасыщенных средах под воздействием электромагнитного поля, или не имеют строгого описания, или требуют для него большего количества параметров, на практике фактически не определяемых. Этим обусловлено возникновение при описании таких процессов феноменологических подходов, в которых теория явления не зависит от реальной физической кинетики процесса, но которые позволяют использовать для коденсированных сред относительно небольшое количество параметров [6,8].

Один из наиболее известных вариантов такого подхода связан с введением «фактора последствия» – нелокального во времени соотношения между параметрами, входящими в уравнения материальных связей. Такая связь может быть представлена в виде интеграла типа свертки, конкретный вид которого определяется видом ядра интегрального оператора, а оно, в свою очередь, определяется моделью функции «памяти».

Процессы, обладающие подобными свойствами, называются эредитарными и известны уже давно. Основные принципы сформулировал итальянский математик В. Вольтерра, посвятивший ряд научных работ развитию этой идеи применительно к физическим и экологическим задачам [18]. Он же предложил использовать для описания эредитарных процессов интегральные уравнения, носящие его имя, – уравнения Вольтерры.

В современной электроразведке начало применения принципов эредитарности связывается с работой В. В. Кормильцева [3], в который он ввел дисперсию в уравнения электродинамики, записав выражение для тока в виде

$$j(t)=\sigma(0)\left[E(t)-\int_0^t m(\tau)E(t-\tau)d\tau\right], \qquad (1)$$

тем самым заложив основы такого феноменологического подхода.

Здесь функция $m(\tau)$ характеризует процесс релаксации проводимости среды, но этот процесс и описывающие его уравнения практически не изучались. Феноменологический подход свелся к рассмотрению в диспергирующих средах обычной системы уравнений Максвелла. В ней уравнения материальных связей представляются в виде интегралов свертки, а линейность такой модели позволяют переходить к решениям уравнений Максвелла в частотном варианте и изучать диспергирующие среды, ограничиваясь набором параметров, входящих, например, в формулу Коула – Коула, и записывая дисперсию сопротивления в виде

$$\rho(\omega)=\rho_0\left[1-\eta_0\left(1-\frac{1}{1+\left(i\omega\tau_0\right)^c}\right)\right], \qquad (2)$$

где комплексная восприимчивость

$$\chi(i\omega)=\frac{1}{1+\left(i\omega\tau_0\right)^c} \qquad (3)$$

определяет параметры дисперсии в соответствии с моделью Коула – Коула. Здесь ω – частота; ρ_0 – удельное электрическое сопротивление на постоянном токе; η_0 – безразмерная поляризуемость; τ_0 – время релаксации; c – параметр, обычно трактуемый как характеристика разброса времен релаксации, распределенных около наиболее вероятного значения ($c < 1$).

Таким образом, идея эредитарности в первоначальном виде не получила достаточно широкого развития в электродинамике.

Параметры электромагнитных полей, распространяющихся в фрагментированных флюидонасыщенных горных породах, несут в себе информацию о строении, составе и условиях залегания пород, а также содержат сведения о литологии пород (трещиноватости, пористости, наличии различного рода нарушений и локальных включений) и о составе и фазовом состоянии флюидов – заполнителей порового пространства коллекторов.

Однако традиционная система уравнений Максвелла не отражает многообразие свойств флюдонасыщенной среды, не учитывает проницаемость формации, ее пористость, потенциал двойного электрического слоя, т. е. всего того, что представляет реальную среду с электрическим током.

Обобщение уравнений Максвелла, связанное с введением функции памяти, также не исчерпывает всего многообразия свойств флюдонасыщенной среды, поскольку оперирует только тремя дополнительными параметрами. Однако введение недебаевских процессов релаксации позволяет более детально моделировать электромагнитные поля в традиционных задачах электродинамики.

Модели дисперсии свойств среды и уравнение релаксации

В последнее время в проблеме влияния дисперсии свойств среды на процессы релаксации появилось большое количество исследований, которые связаны с использованием уравнений в дробных производных, позволяющих получить в явном виде уравнение для неэкспоненциальной релаксации.

Модель Коула – Коула заимствована геофизиками из теории несовершенных диэлектриков, что вполне оправданно. Геофизические среды являются проводниками электрического тока с низкой электропроводностью. Такие проводники, согласно [4], можно рассматривать как диэлектрики с утечкой электрического тока. В теории диэлектрической релаксации подробно охарактеризованы математические модели, позволяющие описать отклик, который представляется более сложным, чем простой закон Дебая, в частности описываемый соотношением Коула–Коула.

Эти модели базируются на фрактальности среды и использовании уравнений в частных производных.

Схемы, рассмотренные в этих работах (с учетом замечания, приведенного выше), формально могут быть использованы для обоснования зависимостей типа Коула–Коула и при изучении поляризационных явлений в гетерогенной геологической среде.

Отметим, что модель Коула–Коула не всегда адекватно описывает экспериментальные данные, что может приводить, например, к искажениям петрофизической интерпретации материалов.

Поэтому в диэлектрической спектроскопии достаточно широкое распространение получила модель Коула – Дэвидсона [14], в которой сопротивление описывается формулой

$$\rho(\omega)=\rho_0\left[1-\eta_0\left(1-\frac{1}{\left(1+(i\omega\tau_0)\right)^{\nu}}\right)\right]$$

с комплексной восприимчивостью

$$\chi(i\omega)=\frac{1}{\left(1+i\omega\tau_0\right)^{\nu}}, \qquad (4)$$

а также модель Гаврильяка–Негами [14], комплексная восприимчивость в которой описывается формулой, обобщающей выражения (3, 4):

$$\chi(i\omega)=\frac{1}{\left(1+(i\omega\tau_0)^{c}\right)^{\nu}}. \qquad (5)$$

Для примера рассмотрим формулу Коула–Коула, как наиболее распространенную в геофизических приложениях.

Подход, связанный с использованием фрактальных представлений о среде, позволяет по-новому взглянуть на проблемы частотной дисперсии. Рассмотрим два момента, связанных с описанием процесса релаксации удельной проводимости в диспергирующей среде.

Обратимся к уравнению (1). Процесс релаксации определяется ядром интегрального оператора, представляющим собой фактически функцию «памяти». В работах [10, 16] показано, что в среде, обладающей свойствами самоподобия, в общем случае функция памяти имеет следующую структуру:

$$K(t,\tau)=\frac{1}{\tau^2}F\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

где τ – время релаксации; $F(t)$ – некоторая безразмерная гладкая функция.

В реальной среде протекает множество релаксационных процессов, каждый из которых обладает своей функцией «памяти», а на практике мы наблюдаем некоторый эффективный процесс.

Фрактальная модель позволяет описать эффективный релаксационный процесс во всей системе как сумму всех процессов самоподобного (фрактального) множества.

В работах [10, 16] показано, что процессы релаксации, протекающие в таком множестве, можно аналитически рассчитать, не конкретизируя вида функции памяти $F(t)$. Среда при этом представляется в виде иерархической совокупности соподчиненных кластеров. В данном случае рассматривалась конкретная модель фрактальности среды, в которой иерархия кластеров описывается соотношением

$$R_l=R_0\eta^l;\ \tau_l=\tau_0\xi^l;\ -L_1\le l\le L_2;\ \eta,\xi>1,$$

где R_l – число, определяющее размер кластера данного уровня; τ_l – соответствующее время релаксации.

В этом случае можно записать достаточно громоздкое выражение для комплексной восприимчивости в виде [10, 16]

$$\chi(\omega)=\frac{1}{1+R(i\omega)},$$

где

$$R(i\omega)=\left[\sum_{k=-L_1}^{L_2}C_k\left(d_f\right)\left(i\omega\tau_0\right)^{-\alpha+i\Omega k}\right]^{-1};\quad \alpha=\frac{\ln\eta}{\ln\xi}\quad -$$

«пространственно-временная» фрактальная размерность; C_k – величина, определяемая значениями Меллин-образа функции памяти F; $\Omega=2\pi/\ln\xi$.

Однако если в разложении ограничиться нулевой гармоникой, то комплексная восприимчивость приобретает вид стандартной зависимости Коула–Коула (2):

$$\chi(\omega)=\frac{1}{1+(i\omega\tau)^{\alpha}},$$

где степенной показатель c определяется величиной «пространственно-временной» фрактальной размерности α.

Таким образом, в случае фрактальной среды множество времен релаксации самоподобного множества кластеров сводится к обычной модели Коула–Коула с параметрами, определяемым *показателями самоподобия*.

Отметим, что такая модель позволяет, в частности, по-новому взглянуть на показатель степени c в формуле Коула–Коула, смысл которого до сих пор остается не совсем ясным, а именно: величина α, учитывая ее связь с фрактальной размерностью самоподобного множества, моделирующего структуру среды, позволяет связать изменение времен релаксации с изменением размеров неоднородностей, порождающих гетерогенность среды.

Из приведенной кластерной модели видно, что время релаксации кластера τ_l связано с его размером R_l соотношением

$$\tau_l = AR_l^{\alpha_f}, \tag{6}$$

где $A = \tau_0 / R_0^{\alpha}$.

Например, при α = 1/2 линейное изменение времени релаксации соответствует квадратичному изменению размеров неоднородностей. Именно такая связь $\tau \sim r^2$ закладывается при интерпретации данных ВП, например, в работе [18]. Учитывая, что обычно показатель степени в формуле Коула – Коула берется равным именно 1/2, это вполне объяснимо.

В другом варианте исследуемая среда имеет сложную многокомпонентную структуру, в которой каждая компонента по-разному реагирует на приложенное внешнее поле, причем релаксация каждой компоненты слабо зависит от того, как происходит релаксация в других частях вещества. В этом случае можно сказать, что релаксация каждой компоненты идет по своему избранному каналу, а в среде в целом развивается релаксационный процесс одновременно по нескольким каналам. В такой многоканальной релаксации необходимо вводить функцию памяти для каждого канала. В этом случае осредненная восприимчивость может быть представлена в виде [10]

$$\chi(\omega) = \frac{1}{1 + \left[\sum_{n=1}^{N} (i\omega\tau_n)^{-\alpha_n} \right]^{-1}}.$$

Отметим, что для ВП теоретическое обоснование применимости формулы Коула – Коула для подобной модели, хотя и в несколько иной форме, было предложено М. С. Ждановым [20]. Это способствовало более широкому ее распространению.

Дисперсия и прогноз параметров среды

Возвращаясь к истолкованию в рамках фрактальной модели формулы Коула-Коула, следует отметить, что данная модель оперирует фактически двумя параметрами: генератором фрактала и фрактальной размерностью. Это в определенном смысле объясняет, почему с помощью такой модели удалось смоделировать соотношение Коула – Коула, которое фактически также обусловлено двумя параметрами. Именно в этом, с нашей точки зрения, заключается ее определенный недостаток. Как уже упоминалось, электромагнитные поля несут информацию о строении, литологии, трещиноватости, пористости и других свойствах горных пород. Удельное сопротивление, фигурирующее в уравнениях Максвелла, не позволяет судить о таких параметрах. Введение частотной дисперсии сопротивления, в приближение Коула – Коула несколько меняет ситуацию. Например, формула (6) увязывает параметры этого приближения с определенными структурными особенностями среды. Тем не менее практически процесс релаксации полностью заменялся значениями двух параметров. Но достаточно ли этих параметров для описания свойств гетерогенной среды?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, обратим внимание на еще один аспект, связанный с спецификой процессов релаксации во фрактальной среде, – возможность описания таких процессов во времени. В работах, опирающихся на фрактальную модель, показано, что процессы релаксации во фрактальной среде могут быть описаны уравнениями с дробными производными [5, 10].

Формальная схема получения уравнений релаксации, соответствующих соотношениям (3–5), достаточно проста и основана на понятии дробного дифференцирования. Это понятие в последние десятилетия все шире используется для описания самых разных процессов, не укладывающихся в рамки традиционных представлений уравнений Максвелла. Существуют различные определения дробной производной. Одно из наиболее распространенных – это определение Римана – Лиувиля [7]. В упрощенной форме его можно записать в виде

$$D_{+0}^{\alpha}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau.$$

Дробным производным свойственно довольно много особенностей, что приводит к определенным сложностям при практическом использовании этого аппарата.

Но отметим главное: в отличие от обычных производных, производная дробного порядка не локальная характеристика функции, она зависит не только от поведения функции в окрестности рассматриваемой точки *x*, но и от принимаемых ею значений на всем интервале (0, *x*).

Рассмотрим для примера уравнение релаксации, приводящее к восприимчивости, описываемой формулой Коула – Коула.

Процедура получения такого уравнения в средах с памятью достаточно описана в работах, посвященных исследованию процессов релаксации несовершенных диэлектриков [5, 10, 16]. Эту процедуру можно использовать и в случае «плохих» проводников. В результате получим уравнение

$$\left(\tau^{-\alpha} + D_{+0}^{\alpha}\right)F(t) = 0. \tag{7}$$

Вводя условное обозначение

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} \equiv D_{+0}^{\alpha}\left[f(t)\right],$$

можем переписать выражение (7) в виде

$$\tau^{\alpha} \frac{dF^{\alpha}(t)}{dt^{\alpha}} = -F(t),$$

аналогичном традиционному уравнению дебаевской релаксации

$$\tau \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\Phi(t);\ t > 0;\ \Phi(0) = \Phi_0.$$

Учитывая, что решение уравнения (7) в частотном режиме выражается формулой Коула–Коула, мы видим еще одно истолкование параметров τ и α.

Для получения уравнений в дробных производных возможен формальный путь, связанный с проведением обратного преобразования Лапласа соответствующих частотных выражений [5]. В частности, это можно сделать для всех зависимостей (3–5), т. е. временной аналог каждой из этих зависимостей может быть получен в виде решения некоторого уравнения, так же как стандартная дебаевская релаксация

Решения уравнений с дробными производными, как правило, выражаются специальными функциями типа функций Фокса. Для уравнения (7) решением является функция Миттаг-Леффлера [15]:

$$e_{\nu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t/\tau)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad t > 0,\ 0 < \alpha \le 1.$$

Эта функция характеризует процесс релаксации сопротивления в рамках общей модели Коула–Коула и определяется теми же параметрами.

В частных случаях (при α = 1 и α = 1/2) временной процесс релаксации определяется аналитически. При α = 1 алгоритм Коула–Коула описывает дисперсию Максвелла–Вагнера, а релаксация задается моделью Дебая [2]:

$$m(t) = m_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

а при α = 1/2 [2]:

$$m(t) = m_0\left(1 - e^{t/\tau} erfc\sqrt{t/\tau}\right),$$

где $erfc(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda.$

Отметим, что эти аппроксимации процесса релаксации определяются теми же параметрами, которые фигурируют в формуле Коула–Коула и не несут новой информации о среде. Поэтому практически их используют только в математическом моделировании, например, для изучения влияния этих параметров на характер кривой спада ВП (рис. 1) [2].

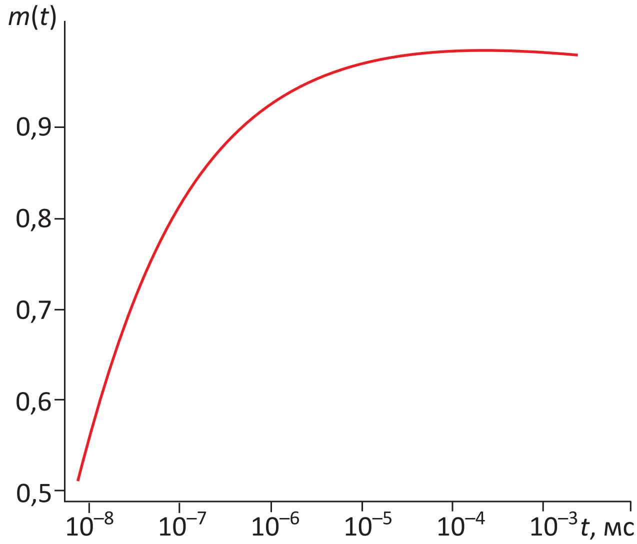

Рис. 1. Фрагмент кривой $m(t)$ при α = 0,5, $\tau = 10^{-5}$ с [2]

В то же время изучение непосредственно полного процесса релаксации сопротивления может дать дополнительную информацию о свойствах среды. Рассмотрим релаксацию удельного сопротивления, возникающую в результате упругого воздействия: так называемый сейсмоэлектрический эффект первого рода (СЭЭ1). Этот процесс релаксации не является дебаевским. Соответственно, уравнение релаксации можно представить в виде уравнения в дробных производных

$$\frac{d^{\alpha} u(t)}{dt^{\alpha}} + \frac{1}{\tau} u(t) = 0, \quad \alpha < 1.$$

Решение такого уравнения представляется, как и в случае, рассмотренном выше, функцией Миттаг-Леффлера. Действительно, реально измеряемое в эксперименте изменение сопротивления хорошо аппроксимируется такой функцией при соответствующих значениях параметров (рис. 2).

Отметим, что практически все релаксации сопротивления, полученные в ходе физического моделирования сейсмоэлектрического эффекта с хорошей точностью, аппроксимировались функциями вида

$$\rho_{\alpha}(t) = A\exp\left(-(t/\tau)^{\alpha}\right), \qquad (8)$$

совпадающими с одной из асимптотик функций Миттаг-Леффлера – экспоненциальным законом Кольрауша–Уильямса–Уоттса [19]:

$$e_{\alpha}(t) \sim \exp\left[-\frac{(t/\tau)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right].$$

Таким образом, процесс релаксации сопротивления в СЭЭ1 также может быть описан с помощью параметров τ и α. Но, как правило, сейсмоэлектрический эффект характеризуется только амплитудой, аномальные значения которой связываются с зона-

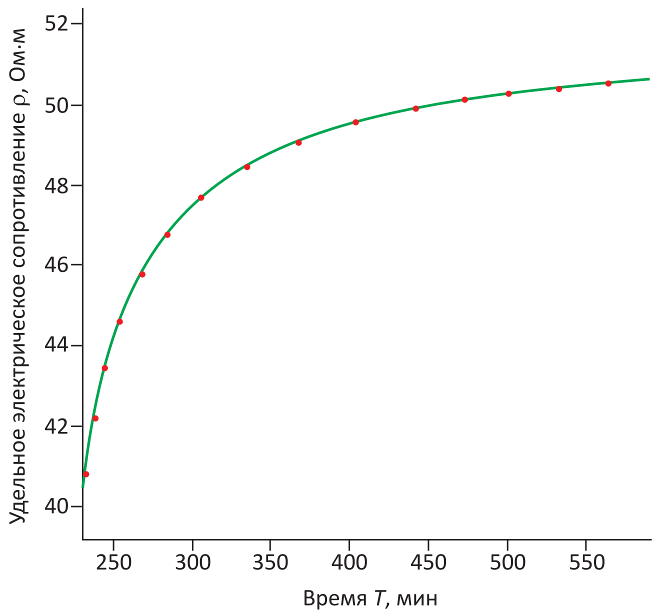

Рис. 2. Релаксация сопротивления на образце карбонатных пород (точки) и ее аппроксимация (сплошная линия) функцией Миттаг-Леффлера при τ = 53 мин, α = 0,59

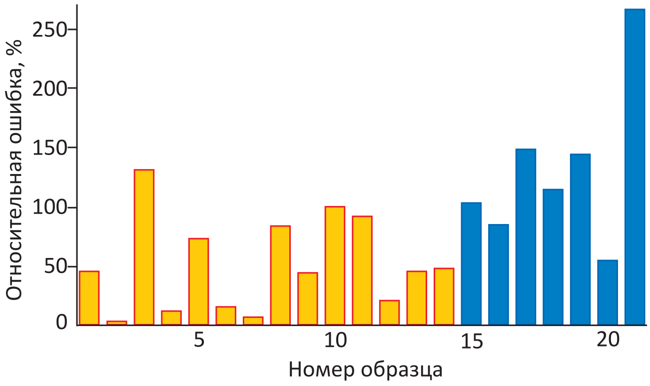

Рис. 3. Относительная ошибка прогноза коэффициента пористости по амплитуде и времени релаксации на двух коллекциях образцов (1–14 – теригенные, 15–21 – карбонатные)

ми повышенной трещиноватости. Это в совокупности с методами электроразведки позволяет прогнозировать возможное наличие коллекторов. Заметим, что такой эффект также существенно зависит от литологических и петрофизических параметров горных пород.

В порядке эксперимента была рассмотрена возможность прогноза таких параметров по характеристикам изменения сопротивления в СЭЭ1. На рис. 3 показан результат прогноза по амплитуде и времени релаксации.

Ситуация существенно меняется при использовании полных кривых изменения сопротивления. В этом случае связи между параметрами характеризуются аттрактором, моделирующим поведение динамической системы, которая определяет процесс изменения сопротивления в результате упругого воздействия. Подробнее схема использования такого подхода рассмотрена в работе [9]. По полным кривым изменения сопротивления можно получить удовлетворительные прогнозные оценки (рис. 4).

Таким образом, можно сделать вывод о целесообразности изучения и использования функций «памяти», или, другими словами, непосредственно процессов релаксации параметров среды. При этом даже из процесса, аппроксимируемого одним набором параметров Коула – Коула, можно извлечь дополнительную информацию о структурных особенностях среды.

В случае, когда в среде происходит сложный процесс, обусловленный комбинацией временных спадов, соответствующих набору различных параметров Коула – Коула, можно рассмотреть дополнительные варианты анализа полного процесса релаксации удельного сопротивления.

Характерная особенность этого процесса – его неэкспоненциальность. Мы уже отмечали, что в определенном приближении такие процессы аппроксимируются функцией Кольрауша – Уильямса – Уотса. В одном из известных формальных подходов [12, 13] предполагается, что неэкспоненциальная релаксация Кольрауша появляется вследствие того, что характеризующая ее корреляционная функция является суперпозицией экспоненциальных корре-

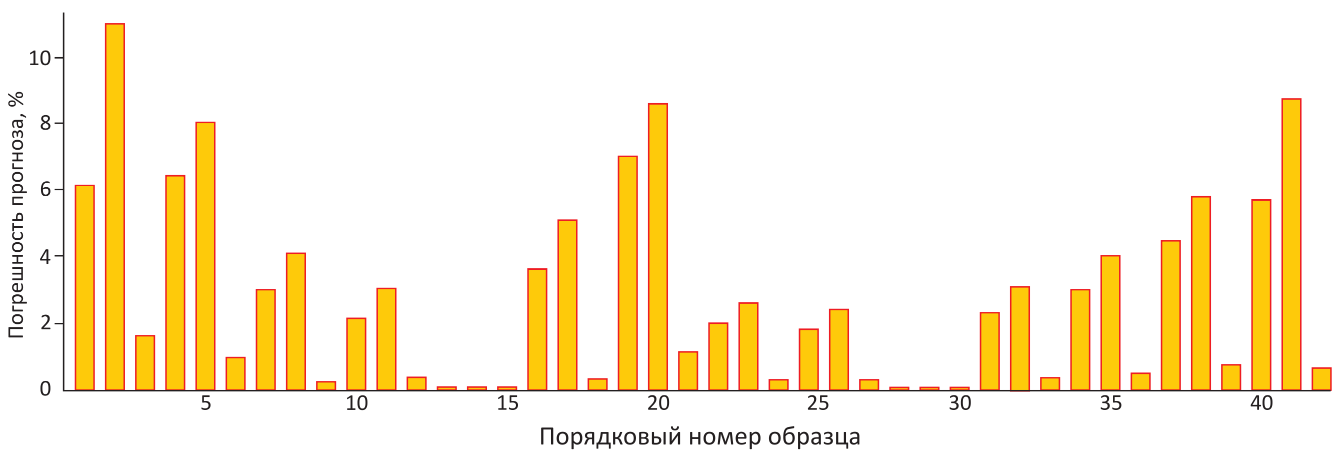

Рис. 4. Погрешность прогноза пористости по полным кривым релаксации сопротивления

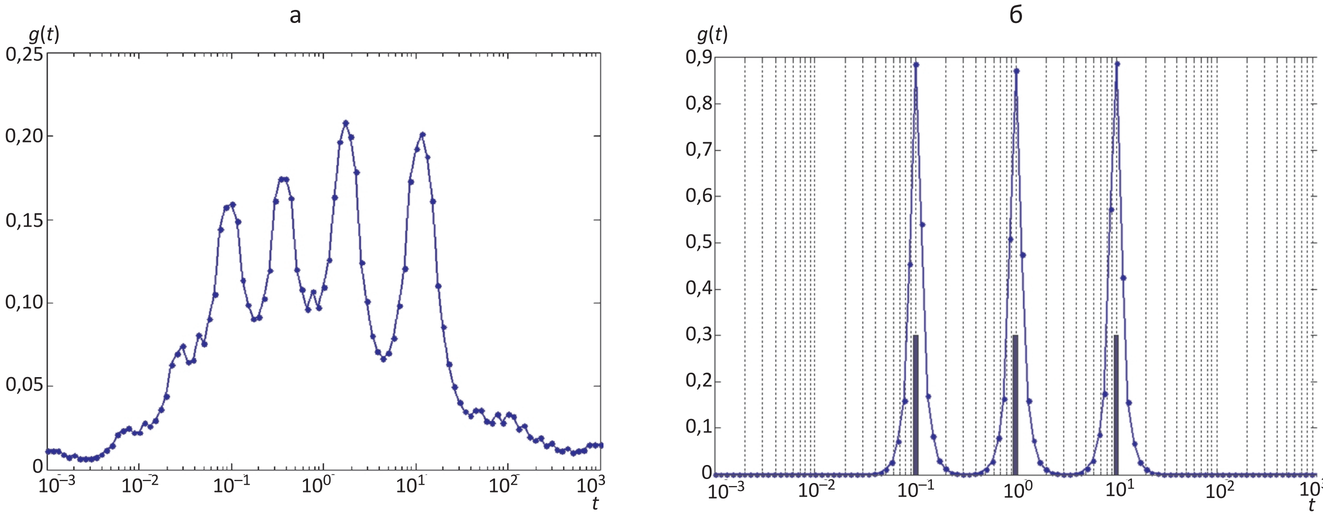

Рис. 5. Результат восстановления РВР для суммарной модели с тремя различными параметрами Коула–Коула (τ = 0, 1, 1, 10, α = 0,5): а – вариант дебаевского спектра, б – вариант экспоненциального закона Кольрауша – Уильямса – Уотса

ляционных функций с некоторыми весовыми коэффициентами вида

$$\exp\left(-\alpha t^{\beta}\right)=\int_{0}^{\infty}s(\tau)\exp(-t/\tau)d\tau.$$

Это дает основание интерпретировать произвольную недебаевскую релаксацию как релаксацию макроскопической системы, содержащей очень большое количество подсистем с экспоненциальной релаксацией.

В связи с этим можно отметить методику интерпретации данных ВП, построенную по аналогии с диэлектрической спектроскопией и базирующуюся на концепции распределения времен релаксации (РВР), когда нормированная макроскопическая функция релаксации $f(t)$ представляется в виде комбинации экспоненциальных функций с подходящими амплитудами и временами релаксации. Аналогичная методика в электроразведке получила название «дебаевская декомпозиция» [11, 17].

При этом в соответствии с упомянутым подходом предполагается непрерывное распределение времен релаксации и задача декомпозиции в общем случае сводится к решению интегрального уравнения

$$v(t)=\int_{0}^{\infty}g(\tau)F(t,\tau)d\tau,$$

где $g(\tau)$ – функция РВР; $F(\tau, t)$ – известная функция, представляющая свертку модельного спада поляризационного процесса с реальным сигналом в источнике. Но в реализованной схеме [5, 6] в соответствии с упомянутым подходом в качестве функции F рассматривается дебаевский спектр. При этом интегральное уравнение можно записать как

$$v(t)=\int_{0}^{\infty}g(\tau)\exp(-t/\tau)d\tau.$$

Уже отмечено, что такой подход к описанию неэкспоненциальной релаксации, каким, собственно, является процесс спада ВП, основывается на предположении, что релаксирующая макроскопическая система состоит из подходящего числа подсистем, каждая из которых релаксирует с собственным временем релаксации. Несомненно, что это предположение может быть справедливо для многих систем, но несомненно и то, что такое разбиение на подсистемы имеет реальный физический смысл только в случае, когда число подсистем конечно и сравнительно невелико. Но тогда суммарный процесс не получится неэкспоненциальным.

Мы показали, что процесс релаксации во фрактальных подсистемах не является дебаевским. Поэтому более целесообразно пользоваться аналогом уравнения (2), взяв в качестве функции F функцию Миттаг-Леффлера, но модельный эксперимент показывает, что можно взять и асимптотическое приближение типа Кольрауша – Уильямса – Уотса (формула (8)).

Использование этого выражения в качестве ядра вместо дебаевских экспонент позволяет получить более точные параметры РВР (рис. 5).

С помощью такого распределения, пользуясь соотношением времен релаксации и размеров неоднородностей, приведенными ранее, также можно получить определенную информацию о структуре среды.

Выводы

В традиционном феноменологическом подходе к теории электромагнитных полей в пористых флюидонасыщенных средах, связанном с описанием влияния частотной дисперсии на основе широко известной формулы Коула – Коула, можно отметить новые аспекты.

Использование фрактальной модели среды и уравнений в дробных производных позволяет взглянуть на вопросы обоснования параметров, входящих в формулу Коула – Коула, с более общих позиций, в частности, на вопросы связи этих параметров со свойствами неоднородной среды и модель релаксации удельного сопротивления. Так, на основе фрактальной модели показана связь изменения времени релаксации с изменением характерного размера элементов микроструктуры среды. Такая связь заложена в степенном показателе формулы Коула – Коула.

Использование решений уравнений в дробных производных позволяет в рамках приближения Коула – Коула уточнить распределение времен релаксации для процессов, характеризующихся несколькими показателями Коула – Коула, используя в качестве функции памяти закон Кольрауша – Уильямса – Уотса.

Показано сходство релаксационной модели теории вызванной поляризации и модели изменения удельного сопротивления при упругом воздействии (сейсмоэлектрический эффект первого рода). Это открывает возможность прогноза таких параметров гетерогенной среды, как пористость и проницаемость, на основе анализа полной кривой релаксации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гейзенберг В.** Роль феноменологических теорий в системе теоретической физики // Успехи физических наук. – 1967. – Т. 91, вып.4. – С. 31–33.
2. **Каменецкий Ф. М., Тригубович Г. М., Чернышев А. В.** Три лекции о вызванной поляризации геологической среды. – М.: EAGE, 2014. – 58 с.
3. **Кормильцев В. В.** Вызванная поляризация в уравнениях электродинамики. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. – 44 с.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с
5. **Новиков В. В., Комкова О. А.** Диэлектрическая релаксация Коула – Коула // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2004. – № 5. – С. 61–64.
6. **О связи** феноменологического описания вызванной поляризации среды с происходящими в ней физическими процессами. Постановка вопроса / Б. С. Светов, С. Д. Каринский, О. А. Агеева, В. В. Агеев // Геофизика. – 2011. – № 4. – С. 25–29.
7. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск.: Наука и техника, 1987. – 668 с.
8. **Тригубович Г.М., Каменецкий Ф. М**. Феноменология вызванной поляризации // Геофизика. – 2013. – № 1. – С. 80–83.
9. **Филатов В. В**. Динамические системы и задачи геолого-геофизического прогноза // Разведка и охрана недр. – 2012. – № 2. – С. 85–90.
10. **Хамзин А. А., Нигматуллин Р. Р., Попов И. И**. Микроскопическая модель недебаевской диэлектрической релаксации. Закон Коула – Коула и его обобщение // Теоретическая и математическая физика. – 2012. – Т. 173, № 2. – С. 314–331.
11. **Application** of the Debye decomposition approach to time domain induced polarization profiling data: a mining example / G. Gurin, A. Tarasov, Yu. Ilyin, K. Titov // 3rd International Workshop on Induced Polarization (6–9 April). Abstracts. – Oléron Island, France, 2014. – P. 104–105.
12. **Beckmann P. A.** Spectral densities and Nuclear Spin Relaxation in solids // Phys. Rep. – 1988. – Vol. 71 – P. 85–128.
13. **Dieterich W., Maass P.** Non-Debye relaxations in disordered ionic solids // Chem. Phys. – 2002 – Vol. 284. – P. 439–467.
14. **Jonsher A. K**. Dielectric Relaxation in Solids. – London: Chelsea Dieletric Press, 1983. – 380 p.
15. **Goreno R., Loutchko J., Luchko Yu.** Computation of the Mittag-Leffler function and its derivatives // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2002. – Vol. 5. – P. 491–518.
16. **Khamzin A.A., Nigmatullin R.R, Popov I. I**. Log-periodic corrections to the Cole-Cole expression in dielectric relaxation // Physica A. – 2013. – Vol. 392, no. 1. – P. 36–148.
17. **Tarasov A., Titov K.** Relaxation time distribution from time domain induced polarization measurements // Geophys. J. Int. – 2007. – Vol. 170, no. 1. – P. 31–43.
18. **Volterra V**. Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations. – London: Blackie&Son, 1931. – 226 p.
19. **Williams G., Watts D. C**. Non-symmetrical dielectric relaxation behaviour arising from a simple empirical decay function // Trans. Faraday Soc. – 1970. – Vol. 66. – P. 80–85.
20. **Zhdanov M.** Generalized effective-medium theory of induced polarization // Geophysics. – 2008. – Vol. 73, no. 5. – P. F197–F211.